# 35期3年　数学Ⅲα・数学ⅠⅡＡＢ演習　共通　臨時休業課題（第２回）No. 1　～因数分解～

まず授業のノートを作り名前を書くこと。そのあと以下の問題を解き、提出は６月の最初の登校日。

**1** 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-2x-3$　(2) $x^2-5xy+6y^2$　(3) $x^2+12x+36$

(4) $x^2-4$　(5) $9x^2+12x+4$　(6) $16x^2-9y^2$

【たすきがけの因数分解】

例題１　$2x^2+11x+15$ を因数分解せよ。

考え方　$ac=2$，$ad+bc=11$，$bd=15$

となる $a$，$b$，$c$，$d$ を見つければよい。

$$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \longrightarrow & bc \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

① $ac=2$ の 2 を　$1\times2$

$bd=15$ の 15 を　$1\times15$，$3\times5$，$5\times3$，$15\times1$

などと，積に分解する。

② $a=1$，$c=2$ として，$b$，$d$ の候補から $ad+bc=\boxed{11}$ となるものをさがす。このとき，右上の図式を利用するとよい。

$b=1$，$d=15$ のとき

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \longrightarrow & 2 \\ 2 & & 15 & \longrightarrow & 15 \\ \hline 2 & & 15 & & 17 \end{array}$$

×失敗

$ad+bc=11$ とならない。

$b=3$，$d=5$ のとき

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 3 & \longrightarrow & 6 \\ 2 & & 5 & \longrightarrow & 5 \\ \hline 2 & & 15 & & 11 \end{array}$$

○成功

$ad+bc=\boxed{11}$ となり，適する。

解答　$2x^2+11x+15=(x+3)(2x+5)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 3 \\ 2 & & 5 \end{array}$$

**2** 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2-7x+5$　(2) $2x^2+5x-3$　(3) $6x^2-x-2$

(4) $4x^2-8x+3$　(5) $6x^2+xy-15y^2$　(6) $8a^2-14ab-15b^2$

【おきかえを利用した因数分解】

例題２　$(x+y)^2+4(x+y)+3$ を因数分解せよ。

考え方　$x+y$ を $A$ でおきかえて因数分解する。

解答　$x+y=A$ とおくと

$(x+y)^2+4(x+y)+3=A^2+4A+3=\underline{(A+1)(A+3)}$　$A$ を $x+y$ にもどす

$=(x+y+1)(x+y+3)$

例題３　$x^2+4x+4-y^2$ を因数分解せよ。

解答　$x^2+4x+4-y^2=(x^2+4x+4)-y^2$　← 項の組み合わせを工夫

$=(x+2)^2-y^2$　← $x+2=A$ とおくと $A^2-y^2$

$=\{(x+2)+y\}\{(x+2)-y\}$　$=(A+y)(A-y)$

$=(x+y+2)(x-y+2)$

**3** 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+y)^2+2(x+y)-15$　(2) $(x-y)^2+6(x-y)+9$

(3) $x^2+8x+16-y^2$　(4) $x^2-4y^2-4y-1$

【たすきがけの因数分解の応用】

例題４　次の式を因数分解せよ。

$$2x^2+3xy+y^2-5x-3y+2$$

考え方　$2x^2+(y$ の１次式$)x+(y$ の２次式$)$ の形に整理する。

解答　$2x^2+3xy+y^2-5x-3y+2$

$=2x^2+(3y-5)x+(y^2-3y+2)$　← $x$ について整理

$=2x^2+(3y-5)x+(y-1)(y-2)$

$=\{x+(y-2)\}\{2x+(y-1)\}$

$=(x+y-2)(2x+y-1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & y-2 & \longrightarrow & 2y-4 \\ 2 & & y-1 & \longrightarrow & y-1 \\ \hline 2 & & (y-1)(y-2) & & 3y-5 \end{array}$$

**4** 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+3xy+2y^2-4x-5y+3$　(2) $2x^2+3xy+y^2+7x+2y-15$

No. 1 はこれで以上です。

5 次の $\theta$ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $\theta=\frac{5}{3}\pi$　　(2) $\theta=-\frac{11}{6}\pi$

6 $\theta$ の動径が第３象限にあり，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

7 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\cos\theta=1$　　(2) $2\sin\theta+\sqrt{3}=0$

8 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

(1) $\sin\theta>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\tan\theta\geqq-\sqrt{3}$

9 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $2\cos^2\theta-7\sin\theta+2=0$ を解け。

10 次の値を求めよ。

(1) $\sin 165^\circ$　　(2) $\cos 165^\circ$　　(3) $\tan 195^\circ$

11 $\alpha$ の動径が第１象限にあり，$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin 2\alpha$　　(2) $\cos 2\alpha$　　(3) $\tan 2\alpha$

12 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos 2\theta=\cos\theta-1$　　(2) $\sin 2\theta+\cos\theta=0$

例題５　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+2\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

解説

$\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$-1\leqq t\leqq 1$　……①

$y$ を $t$ で表すと　　$y=t^2+2t$

すなわち　　$y=(t+1)^2-1$

よって，① の範囲において，$y$ は

$t=1$ で最大値 3 をとり，

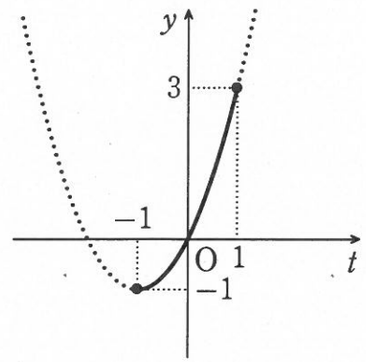
$t=-1$ で最小値 $-1$ をとる。

また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$t=1$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{2}$，　$t=-1$ のとき　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

したがって，この関数は

$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 3 をとり，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ で最小値 $-1$ をとる。




13 $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，関数 $y=\cos^2\theta-\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $\theta$ の値を求めよ。

例題６　関数 $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。

解説

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=r\sin(\theta+\alpha)$

とおくと

$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

図から　$\alpha=\frac{\pi}{3}$

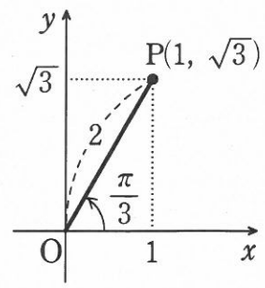
よって

$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

ゆえに　　$y=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$ であるから　$-2\leqq 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 2$

したがって，$y$ の最大値は 2，最小値は $-2$ である。




14 次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1) $y=\sin\theta-\cos\theta$　　(2) $y=-\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

No.2 の問題はこれで以上です。

**15** 次のような等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1, 4, 7, 10, 13, ……　　(2) 7, 3, −1, −5, −9, ……

**16** 次のような等差数列の和を求めよ。

(1) 初項 7，公差 4，項数 $n$　　(2) 初項 20，公差 −5，項数 $n$

**17** 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 1, 3, 9, 27, ……　　(2) $1,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{36},\ \frac{1}{216},\ \cdots\cdots$

**18** 次の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和 $S_n$ を求めよ。

(1) 1, 6, 36, 216, ……　　(2) $4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \cdots\cdots$

**19** 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n} k$　　(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2$　　(3) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+3k)$　　(5) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+3)$　　(6) $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$

例題 7　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1, 8, 22, 43, 71, ……

**解説**

この数列の階差数列は　7, 14, 21, 28, ……

1, 8, 22, 43, 71, ……
∨ ∨ ∨ ∨
7, 14, 21, 28, ……

その一般項を $b_n$ とすると，$b_n=7n$ である。

よって，$n \geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 7k=1+7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$

すなわち　$a_n=\frac{7}{2}n^2-\frac{7}{2}n+1$

初項は $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって，一般項は　$a_n=\frac{7}{2}n^2-\frac{7}{2}n+1$

**20** 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 2, 3, 6, 11, 18, 27, ……　　(2) 15, 11, 3, −9, −25, −45, ……

例題 8　次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+5$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=7a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

**解説**

(1)（$a_{n+1}=a_n+$(定数)　の形は、等差数列パターン）

数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 5 の等差数列である。

よって，一般項 $a_n$ は　$a_n=3+(n-1)\cdot 5$

すなわち　$a_n=5n-2$

(2)（$a_{n+1}=$(定数)$\times a_n$　の形は、等比数列パターン）

数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 7 の等比数列である。

よって，一般項 $a_n$ は　$a_n=2\cdot 7^{n-1}$

**21** 次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2$　　(2) $a_1=3,\ a_{n+1}=a_n-5$

(3) $a_1=-2,\ a_{n+1}=3a_n$　　(4) $a_1=3,\ a_{n+1}=-5a_n$

No. 3 の問題はこれで以上です。